

Table des matières

Préface	5
Avant-propos	9
MATHÉMATIQUES ET OUTILS DE CALCUL	
Nombres, équations algébriques et formulation de problème	15
1.1 Nombres entiers, rationnels ou réels	15
1.1.1 Nombres entiers : $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$	15
1.1.2 Nombres rationnels : $\mathbb{Q}$	16
1.1.3 Les nombres réels $\mathbb{R}$, rationnels et irrationnels	18
1.1.4 Représentation graphique des nombres : la droite réelle	20
1.1.5 Valeur absolue d'un nombre	20
1.1.6 Partie entière et partie décimale d'un nombre	20
1.1.7 Calcul littéral, rappel sur les règles de calcul	20
1.2 Équations - Inéquations	23
1.2.1 Les équations	23
1.2.2 Exercices de remise à niveau	26
1.2.3 Les inéquations	26
1.2.4 Exercices de remise à niveau	27
1.3 Formulation de problème	28
1.3.1 Premier exemple : estimation d'une abondance	28
1.3.2 Retour sur la démarche utilisée	29
1.3.3 Deuxième exemple : optimisation du rendement d'une pêcherie	30
Fonctions réelles	33
2.1 Motivation	33
2.1.1 Électricité	33
2.1.2 Mécanique	33
2.1.3 Biologie des organismes	35
2.1.4 Biologie des populations	35
2.1.5 Consommation de ressources	36
2.2 Généralités	36
2.2.1 Définitions	36
2.2.2 Dérivées usuelles	39
2.2.3 Théorème des accroissements finis	40
2.2.4 Développement limité en x_0 (formule de Taylor-Young)	41
2.3 Étude d'une fonction réelle	41
2.3.1 Sens de variation	42
2.4 Intégration	43
2.4.1 Primitives	43
2.4.2 Intégration	44
2.4.3 Formule d'intégration par partie	45
2.4.4 Changement de variable	46
2.4.5 Théorème de la moyenne	46
Algèbre linéaire	49
3.1 Motivation	49
3.1.1 Exemple 1 - Modèle de population structurée en stades de vie	49
3.1.2 Exemple 2 - Modèle de population avec des processus à retard	49

3.2 Bases de $\mathbb{R}^n$	50
3.2.1 Exemples : $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$	50
3.2.2 Systèmes libres (ou indépendants) - Bases de $\mathbb{R}^n$	51
3.3 Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$	52
3.4 Applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$	52
3.4.1 Définition - Propriétés générales	52
3.5 Algèbre sur les matrices	53
3.5.1 Somme de matrices	53
3.5.2 Produit de matrices	54
3.5.3 Trace d'une matrice	55
3.6 Changements de bases	55
3.6.1 Matrice de passage	56
3.6.2 Effet d'un changement de bases sur les coordonnées des vecteurs	56
3.6.3 Effet d'un changement de bases sur la matrice d'une application linéaire	57
3.7 Déterminant	57
3.7.1 Définition	58
3.7.2 Propriétés	58
3.7.3 Diagonalisation de matrices	59
3.7.4 Systèmes linéaires	61
3.7.5 Retour sur l'exemple 2 - Modèle de population avec des processus à retard	62
Nombres complexes - Définition et propriétés de base	63
4.1 Rappel de trigonométrie	63
4.2 Définition et représentation géométrique	65
4.3 Opérations sur les nombres complexes	67
4.4 Formules trigonométriques et nombres complexes	68
4.5 Résolution d'équations du second degré à discriminant négatif	69
Systèmes différentiels linéaires d'ordre 1	71
5.1 Motivation et généralités	71
5.1.1 Un exemple en dynamique des populations	71
5.1.2 Pourquoi ce chapitre ?	72
5.1.3 Quelques éléments sur les solutions des équations différentielles	73
5.2 Équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 1	73
5.3 Équations différentielles linéaires non homogènes d'ordre 1	75
5.4 Systèmes différentiels linéaires	77
5.4.1 Résolution d'un système différentiel linéaire quand la matrice associée est diagonalisable dans $\mathbb{R}$	78
5.4.2 Résolution d'un système différentiel linéaire quand la matrice associée a des valeurs propres complexes	80
Applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$	85
6.1 Motivation	85
6.2 Applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$	85
6.2.1 Le cas $n = 2$	85
6.2.2 Généralisation à tout $n \in \mathbb{N}$	92
6.3 Applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$	94
6.3.1 Quelques généralités	94
6.3.2 Différentiabilité et développement limité à l'ordre 1 en un point $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$	94
Espaces Euclidiens	97
7.1 Motivation	97
7.2 Formes bilinéaires	98
7.3 Formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques	99
7.3.1 Symétrie	99
7.3.2 Dualité entre formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques	99
7.3.3 Propriétés des formes quadratiques	100
7.4 Produits scalaires	102
7.4.1 Définition	102
7.4.2 L'inégalité de Cauchy - Schwarz	102
7.4.3 Exemple : l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 2	103
7.5 Orthogonalité	103

INITIATION À LA MODÉLISATION EN ÉCOLOGIE

Une première approche de la modélisation	107
8.1 Modèles à temps discret à une variable d'état	107
8.1.1 Principes de construction d'un modèle	107
8.1.2 Équilibres : définition et stabilité	108
8.2 Modèles à temps continu à une variable d'état	112
8.2.1 Construction : passage du temps discret au temps continu	112
8.2.2 Études qualitatives des modèles en temps continu à une variable d'état : les équilibres et leur stabilité	113
8.3 Modèles à temps discret à plusieurs variables d'état	116
8.4 Modèles à temps continu à plusieurs variables d'état	120
8.4.1 Forme générale	120
8.4.2 Méthode d'étude : un exemple	120
8.4.3 Espace des phases et portrait de phase	123
8.4.4 Classification des équilibres dans le plan (modèle à 2 variables)	127
Quelques modèles classiques et les dynamiques associées	133
9.1 Modèles de prédation	133
9.1.1 Le modèle de Lotka - Volterra	133
9.1.2 Le modèle de Rosenzweig - McArthur	134
9.2 Modèle de compétition	137
9.3 Modèle de chemostat	140
9.4 Modèles d'épidémiologie	145
9.4.1 Le modèle SIS	145
9.4.2 Le modèle SIRS	146
Dynamique des communautés et fonctionnement des écosystèmes	151
10.1 Critères de Routh- Hurwitz	151
10.1.1 Notations	151
10.1.2 Le critère	152
10.1.3 Le cas où $n = 2$	152
10.1.4 Le cas où $n = 3$	152
10.2 Modèle NPZD	153
10.2.1 Le modèle	153
10.2.2 Exemples de questions	153
10.2.3 Analyse du modèle	154
10.2.4 Interprétation et retour aux questions	156
10.3 Dynamique d'une chaîne trophique	157
10.3.1 Présentation du modèle	157
10.3.2 Exemples de questions	157
10.3.3 Analyse de la dynamique	157
10.3.4 Interprétation et retour aux questions	159
10.4 Modèles de réseaux trophiques	160
10.4.1 Matrice d'adjacence	160
10.4.2 Un modèle générique	160

PROJETS

Croissance en taille d'un individu	165
11.1 Exemple de données de croissance d'un organisme	165
11.2 Représentation de la croissance d'un organisme : modèle de croissance	168
11.3 Étude du modèle de croissance et interprétation des résultats	170
11.4 Relation entre le modèle et les données	171
11.5 Un premier cas d'étude : relation linéaire entre deux grandeurs	172
11.6 Estimation des paramètres de croissance : taux de croissance, taille à l'âge adulte, taille à la naissance	174
Eutrophisation d'un lac	177
12.1 Description du projet et modélisation	177
12.2 Étude analytique du modèle dans le cas particulier où $q = 2$	178
12.3 Généralisation	179
12.4 Correction du projet	179

12.4.1 Correction du cas $q = 2$	179
12.4.2 Généralisation	184
Compétition entre corail et macroalgue	187
13.1 Le contexte du projet	187
13.2 Étude préliminaire : le modèle de compétition de Lotka-Volterra	187
13.3 Le modèle Corail/Macroalgue/Gazon	188
13.4 Impact du broutage	189
13.5 Correction du projet	190
13.5.1 Analyse du modèle mathématique	190
13.5.2 Impact du broutage	192
Dynamique des populations exploitées	195
14.1 Étude préliminaire	195
14.2 Exploitation d'une espèce dans un réseau trophique	196
14.3 Exploitation de plusieurs niveaux trophiques	197
14.3.1 Stratégie de pêche constante	197
14.3.2 Stratégie de pêche variable - Modèle bioéconomique	198
14.4 Correction du projet	199
14.4.1 Étude préliminaire	199
14.4.2 Exploitation d'un prédateur dans un système prédateur - proie	202
14.4.3 Exploitation des deux niveaux trophiques avec une stratégie fixée	207
14.4.4 Exploitation des deux niveaux trophiques avec une stratégie variable	210
Bibliographie	211

CORRECTION DES EXERCICES